Title	漸近的概週期性ト ergodic theorems
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 185 p.407-p.414
Issue Date	1939-09-12
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74734
rights	
Note	

803. 漸近的概週期性ト ergodic theorems.

吉田　耕作（阪大）

§ 1

T ヲ Banach 空間 E ノ bounded linear transformation トシ

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常數 C $\qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$

トスル。

$\boxed{\text{Mean ergodic theorem}}$[(1)] 任意ノ $x \in E$ ニ對シ

(2) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{Tx+T^2x+\cdots\cdots+T^nx}{n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \text{ ガ E デ} \\ \text{weak compact ナラバ} \end{array}\right.$

$\dfrac{T+T^2+\cdots\cdots+T^n}{n}x$ ハ強收斂シ其極限ハ E ノ b. l. transf. T_1 ヲ以テ $T_1 \cdot x$ ト表ハセ且ツ

$$TT_1 = T_1T = T_1^2 = T_1.$$

$\boxed{\text{Uniform ergodic theorem}}$[(2)]

(3) $\left\{\begin{array}{l} \text{適當ニ正整數 } m \text{ ト E トノ完全連續線型作用素} \\ V \text{ ヲトレバ } \|T^m - V\| < 1 \end{array}\right.$

ト出來ルナラバ

---

(1) 談話 720, 731

(2) 談話 679, 680

$$
(4)\begin{cases} T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i T_i+S,\ TT_i=T_iT=\lambda_iT_i, \\ \qquad\qquad T_i^2=T_i,\ T_iT_j=0\ (i\neq j), \\ T_iS=ST_i \text{ 且ツ } \|S^n\|\leqq\dfrac{\delta}{(1+\varepsilon)^n}\quad (n=1,2,\cdots\cdots) \end{cases}
$$

ナル如キ完全連続線型作用素 T_i ト連続ナ線型作用素 S トガ存在スル。但シ λ_i ハ T ノ絶對値 1 ノ固有値

以上二ツノ *ergodic theorem* ハ筆者ト角谷静夫氏ガ嘗テ得タ所デアリマス。本談話デハ之レ等ノ二ツノ中間ニアルト云フベキ *ergodic theorem* 二ツノ得ラレルコト及ビ之レ等ト漸近的概週期性トノ関係ヲ述ベタイ。

§2

考ヘノ出発点ハ *H. Bohr* ノ概週期函数ノ平均ノ存在ト M. *Ergodic Theorem* トノ関係デアリマス。即チ

$-\infty<t<+\infty$ デ定義サレタ複素数値連続函数 $f(t)$ ガ概週期的デアルト云フノハ，任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ正数 l_ε ガ定リ実軸上長サ l_ε ノ區間ハ何レモ

$$
\underset{-\infty<t<+\infty}{l.u.b.}|f(t+l)-f(t)|\leqq\varepsilon
$$

ナル如キ数 l ヲ少クトモ一ツ含ムコトデアル。コノトキ *Bohr* ニヨレバ全テノ s ニ對シテ一様ニ $\boxed{\text{平均}}$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\int_{s}^{s+u} f(t)\,dt$$

ガ存在シ且ツコノ平均ノ存在ガ概週期函數論ノ基礎ヲナスノデアリマス。

所ガ S. Bochner ト J. Favard ニヨレバ上ノ almost periodicity ハ次ノ所謂 normality ト同等デアリマス。即チ

$f(t)$ ガ normal ト云フノハ，任意ノ實數列 $\{h_n\}$ ニ對シ函數列 $\{f_n(t)\}$, $f_n(t)=f(t+h_n)$ ガ実軸上全体デ一様收斂スル部分函數列ヲ含ムコトデアル。

換言スレバ距離 $(f_n, f_m)=\underset{-\infty<t<\infty}{l.u.b.}\left|f_n(t)-f_m(t)\right|$ ノ意味デ $\{f_n(t)\}$ ガ totally bounded ニナルコトデアル。

故ニ $\{f_s(t)\}$, $f_s(t)=f(t+s)$, ノ全体ガ上ノ距離ノ意味デ張ル Banach 空間 E トココデノ norm 1 ノ線型作用素 T_s: $T_s f(t)=f_s(t)=f(t+s)$ ニ對シテ mean ergodic theorem ヲ apply スレバ(1) $\boxed{\text{平均}}$ ノ存在ガ云ヘルワケデアリマス。之レ trivial ナ注意カラ ergodic theorems ヲ導クコト並ニ之レト periodicity トノ關係ニ氣付キマス。即チ

---

(1) one-parameter group or semi-group ヲナス線型作用素系ニ對シテ M.E.T. ノ拡張サレルコトハ云フ迄モアリマセン。

§3

Tヲ Banach空間Eデ(1)ヲ満足スル線型作用素トスル。

$x \in E$ニ對シテ点列$\{T^n x\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ヲ考ヘル。之レ点列ノ種々ノ total boundedness (t. b.) ニ對應シテ種々ノ ergodic theorems ガ得ラレ且ツ之レ等ト種々ノ週期性トノ関係ガアルコトガ豫[redacted]サレル。

$\boxed{\text{I}}$ 一番弱イノハ(2)ガ云ヘル t. b. デ、コノタメニハ例ヘバ$\{T^n x\}$ノ張ル(1)凸集合ガEデ weak compact ニナルナラ充分ナ訳デス。之ガ兎ニ角 M.E.T. ノ場合ニ當ル(少シ強スギルケレドモ)。M.E.T. ハ何ト言ヒカヘテモ結局(2)ノ假定ガ一番簡明デスカラ$\boxed{\text{I}}$ハナクモガナデシタ。

此ノ場合ノ週期性ニツイテハ、$T^n x = T_1 x + (T^n - T_1) x$ダカラ、M. E. T. ニヨリ、$T^n x$ハ其算術平均ガ0ニ強收斂スル如キ誤差ヲ除イテ$n$ニ無関係ト述ベテ置クヨリ他アリマセン。

$\boxed{\text{II}}$ 次ハ、任意ノ$x \in E$ニ対シテ$\{T^n x\}$ガ Eノ norm ノ意味デ t. b. ナ場合。勿論コノトキハ M.E.T. ハ成立スル。

コノ case ニ於テハ、$T^n x$ハnニ關シテ漸近的概週期性トデモ名付クベキ性質ヲモツコトガ云ヘル。

即チ

(5) $\begin{cases} \text{任意ノ } \varepsilon>0 \text{ ニ對シテ、正整数ヲ両端トスル長サ} \\ l_\varepsilon \text{ ノ區間ハ必ズ } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^{n+l}x-T^n x\|\leqq\varepsilon \text{ ナ} \\ \text{ル如キ正整数 } l \text{ ヲ含ム如キ } l_\varepsilon \text{ ガ定ル。} \end{cases}$

$\boxed{\text{証明}}$ 帰謬法ニヨル。或ル $\varepsilon>0$ ニ對シ上ノ如キ l_ε ガ決シテ定ラナイトスル。然ラバ任意ノ正整数 h_1 ニ對シ適當ニ長サ $2h_1+1$ ノ正整数ヲ両端トスル。區間 (a_2, b_2) ヲ定メレバ之區間ニ屬スル任意ノ整数 l ニ對シ

$$(6)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^{n+l}x-T^n x\|>\varepsilon$$

トナル。(a_2, b_2) ノ中点ヲ h_2 トスレバ $h_2-h_1\in(a_2, b_2)$ ダカラ $l=h_2-h_1$ ハ (6) ヲ満足スル。次ニ長サ $2(h_1+h_2)+1$ ナル正整数ヲ両端トスル，區間 (a_3, b_3) ヲ定メレバ之ノ區間ニ屬スル全テノ整数 l ニ対シ (6) ガ成立ツ如ク出来ル。所ガ (a_3, b_3) ノ中点ヲ h_3 トスレバ h_3-h_2, h_3-h_1 ハ双方共ニ $\in(a_3, b_3)$ ダカラ $l=h_3-h_2$, h_3-h_1, h_2-h_1 ハ (6) ヲ満足スル。以下同様ニシテ，h_1, h_2, h_3, …… ヲ定メ $i>j$ ナラ常ニ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^{n+h_i-h_j}x-T^n x\|>\varepsilon$$

ナラシメ得ル。從ツテ

$$(7)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^{n+h_i}x - T^{n+h_j}x \| > \varepsilon \qquad (i \neq j)$$

所ガ假定ニヨリ $\{T^{h_i}x\}$ ガ t. b. ダカラ部分列 $\{T^{h_i'}x\}$ ヲ適當ニエラビ

$$\| T^{h_i'}x - T^{h_j'}x \| \leqq \frac{\varepsilon}{2C}$$

ト出来ル、從ッテ (1) ニヨリ全テノ n ニ対シ

$$\| T^{n+h_i'}x - T^{n+h_j'}x \| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

之レハ (7) ニ矛盾スル。 —— 以上 ——

$\boxed{\text{例}}$ 先ヅ既ニ述ベタ Bohr ノ概週期函數ノ場合。次ニ compactum Ω 全体ヲ Ω 内ニ寫ス連續寫像 $t \longrightarrow P(t)$ ガ contraction ナリトスル：即チ任意ノ $t, s \in \Omega$ ニ対シ

$$\text{距離}\,(P(t), P(s)) \leqq \text{距離}\,(t, s)$$

ガ成リ立ツトスル．Ω デ連續ナ複素数値函数 $x(t)$ ノ全体ノ作ル Banach 空間デ(1) 定義サレタ線型寫像 T：

$$T \cdot x = y, \quad y(t) = x(P(t))$$

ハ norm $\leqq 1$ 且 $\{T^n x\}$ ハ totally bounded デアル.
(Ascoli-Arzela ノ定理)

$\boxed{\text{III}}$ 次ハ $\{T^n\}$ ガ operator ノ norm ノ意味デ

---

(1) $\|x\| = \max_{t \in \Omega} |x(t)|$

t. b. ナ場合、コノトキハ E デノ連続ナ線型写像ノ全体 $\widetilde{E}$ ヲ operator ノ norm ノ意味デ Banach 空間ト考ヘレバ $\widetilde{E}$ デ $\boxed{\text{II}}$ ノ case ニナル訳デスカラ M. E. T. 即チ operator ノ norm ノ意味デノ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}T^m$ ノ存在及ビ漸近的概週期性ガ云ヘル訳デアル。

(注意) $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}T^m\right\}$ ガ $\widetilde{E}$ デ weak compact ト云フ弱イ假定デ $\widetilde{E}$ デノ M. E. T. モ得ラレル訳デス。之レハ $\boxed{\text{II}}$ ト $\boxed{\text{III}}$ トノ中間ニ位スルモノデセウ。実ハ之レヲ Uniform Ergodic Theorem ト呼ブベキカモ知レマセンガ，$\widetilde{E}$ ノ conjugate space ヲ考ヘルト云フノモ一寸苦シイ訳デスカラ。併シ斯ウ考ヘテクルト $\widetilde{E}$ ハ所謂 linear metrical complete ring デスカラ，operate サレル点ニ free ナ ring デノ ergodic theorem ヲ考ヘ得ル訳デス。餘リコンナコトヲやッテヲルト H. Weyl 先生ニ industrial mathematics (?) ト怒ラレ相デスカラ一先ヅ之レデ止メテヲキマセウ。

但シ私ノ目的ハ，M. E. T. ト U. E. T. トハ餘リニカケハナレスギテルノデ，実際問題ニ apply スル上カラモ中間ヲ埋メルコトハ必要ト信ジタカラニ他ナラナカッタノデス。

$\boxed{\text{IV}}$ 次ハ $\{T^n\}$ ガ operator ノ norm ノ意味デ t. b. 且ツ $\{T^n\}$ ノ極限ノ一ツガ完全連続ナ場合，

之レガU.E.T.ニ他ナラヌコトハ(3)及ビ(4)カラ直チニワカリマス。

(注意) 完全連続性ノタメニ,Tノ絶対値1ノ固有値ノ個数有限ト云フコトガU.E.T.ノ場合ニハ出テ来ル訳デスガ,$\boxed{\text{III}}$ノ場合ニハ一般ニ無限ニ多クアル訳デス。實際S. Bochner ト J. von Neumann ノ Almost periodic functions in Groups (Trans. Amer. Math. Soc., 1935, 21−50) ニ相應シテ考ヘレバ明デアリマセウ。

勿論B.N.ノ場合ハ群ノ上デ考ヘテルタメニ"Asymptotic"ナル形容詞ナシニ almost periodic ニナル訳デスガ吾々ノ場合ニハ semi-group (正整数ノ加法)ナルタメニB.—N.ノ如キ Harmonic Analysis ガ出来ナイノデアリマス。semi-group ノ上ノ a.p.f. ハ大切ナ問題デアラウト思ヒマス。